SỬ DỤNG MỘT SỐ KIẾN THỨC TOÁN HỌC
ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬT LÝ ĐIỂN HÌNH

Phạm Quốc Toản – Trung tâm NC&SX Học liệu

Vật lý là môn khoa học thực nghiệm, các định luật, công thức Vật lý thường được xây dựng trên biểu thức toán học phù hợp với kết quả thực nghiệm. Việc sử dụng toán học có hiệu quả trong việc giải các bài toán Vật lý vẫn là chuyện khó đối với học sinh phổ thông. Sau đây, tôi xin giới thiệu một số dạng bài tập Vật lý điển hình có ứng dụng của toán học để giải. Các ứng dụng toán học này thường được sử dụng trong việc giải các bài toán Vật lí khó trong các đề thi học sinh giỏi, tốt nghiệp THPT, Đại học,… Tùy thuộc vào bài toán cụ thể mà học sinh có thể sử dụng linh hoạt một trong các kiến thức đó để giải bài toán.

☞ ***Dạng 1: Áp dụng bất đẳng thức Côsi:***

+ Áp dụng cho 2 số dương a,b

$$a + b \geq 2.\sqrt{a.b} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(a+b)_{min} = 2\sqrt{a.b}\\ (\sqrt{a.b})_{max} = \dfrac{a+b}{2}\end{array}\right.$$ dấu "=" xảy ra khi a=b

+ Áp dụng cho n số hạng

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$ dấu bất đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2= \ldots = a_n$

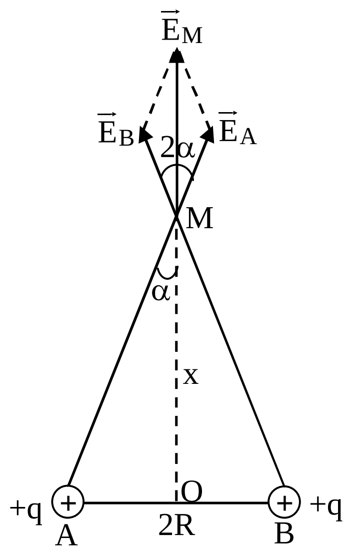
Ví dụ: Cho 2 điện tích điểm cùng dấu (điện tích dương) $q_1= q_2 = q$ đặt tại hai điểm A và B cách nhau 2R.

a. Xác định cường độ điện trường tổng hợp tại M nằm trên đường trung trực và cách AB một đoạn x.

b. Định vị trí M để E_M cực đại, cực tiểu.

Bài giải:

a. Xác định E_M: Cường độ điện trường tổng hợp tại M do hai điện tích gây ra.



$$\overrightarrow{E_M} = \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_B}$$

Độ lớn: $E_A = E_B = \dfrac{k.q}{AM^2} = \dfrac{k.q}{R^2 + x^2}$ (với $AM^2= \sqrt{R^2 + x^2}$)

Vì $\begin{cases}\left(\vec{E}_A, \vec{E}_B\right) = 2\alpha \\ E_A = E_B\end{cases}$ nên $E_M = 2.E_A.\cos\alpha$

Trong tam giác vuông AOM:

$$\cos\alpha = \frac{x}{AM} = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$ thay vào $E_M = \dfrac{2k.q.x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$

b. Định vị trí M để E_M cực đại: Đặt $y= \dfrac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$

$E_M = 2kq.y$ $\quad$ E_M cực đại khi y_{max}.

Dùng bất đẳng thức côsi để tìm y_{max} như sau:

$$R^2 + x^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + x^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{R^2}{2}.\frac{R^2}{2}.x^2}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + x^2)^3 \geq 27(\frac{R^2}{2}.\frac{R^2}{2}.x^2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + x^2\right)^{3/2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.R^2.x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}.R^2} \geq \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = y; \qquad y_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}.R^2} \qquad \text{khi } \frac{R^2}{2} = x^2$$

$x = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$ (có 2 điểm M nằm đối xứng nhau qua O); tam giác AMB vuông cân tại M

Từ đó: (E_M) max $= \frac{4.kq}{3\sqrt{3}R^2}$

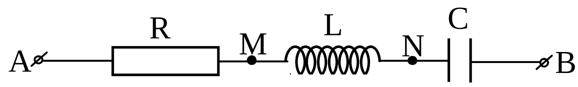
* Định vị trí M để E_M cực tiểu: Nhìn vào biểu thức E_M ta thấy: (E_M)min = 0 khi x = 0. Lúc này M trùng O

☞ ***Dạng 2: Dùng định lý hàm số sin hoặc cosin trong tam giác:***

+ Định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

+ Định lý hàm số cosin: $a^2 = b^2 + c^2 + 2.b.c.\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)$

Ví dụ: Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ



1.Thay đổi R để U_R cực đại. Tìm R?

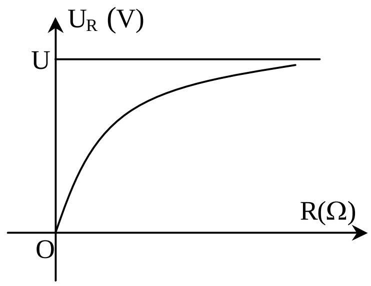
2.Thay đổi L để U_L cực đại. Tìm L?

Bài giải:

1. Thay đổi R để U_R cực đại: $U_R = I.R = \frac{U.R}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{1 + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R^2}}}$

$U_{Rmax} = U \Leftrightarrow$ Mẫu số cực tiểu $\Leftrightarrow R = \infty$

Đồ thị:

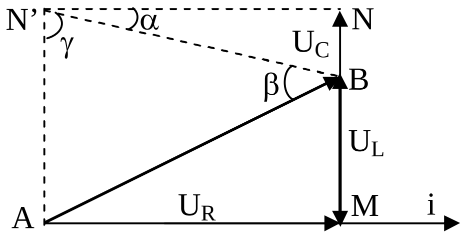


2.Định L để U_L cực đại:

$$u_{AB} = u_{AM} + u_{MN} + u_{NB}$$

Dạng vectơ: $\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MN} + \vec{U}_{NB} \Leftrightarrow \vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C$

Vẽ giản đồ theo cách nối tiếp vectơ:



AB= U_{AB} = U

AM = U_R

MN = AN' = U_L

NB = U_C

Ký hiệu các góc α, β, γ như hình vẽ.

Dùng định lý hàm số sin: $\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{AN'}{\sin\beta} \Leftrightarrow \frac{U}{\sin\gamma} = \frac{U_L}{\sin\beta}$

$$U_L = \frac{U.\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Khi L thay đổi góc α không đổi với: $\tan\alpha = \frac{NB}{N'N} = \frac{Z_C}{R}$

$\sin\gamma = \sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}}$ (không đổi)

Còn góc β thay đổi

$U_{Lmax} = \frac{U}{\sin\gamma}$ khi $\sin\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 90^0$ tam giác ABN' vuông tại B

$U_{Lmax} = \frac{U\sqrt{R^2 + Z_C^2}}{R}$ lúc này góc $\widehat{BAM} = \gamma$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\tan\gamma = \frac{MB}{AM} = \frac{Z_L - Z_C}{R} \Leftrightarrow \cot\alpha = \frac{Z_L - Z_C}{R}$

$\frac{R}{Z_C} = \frac{Z_L - Z_C}{R} \Rightarrow Z_L = \frac{R^2 + Z_C^2}{Z_C}$

☞ ***Dạng 3: Ứng dụng đạo hàm***

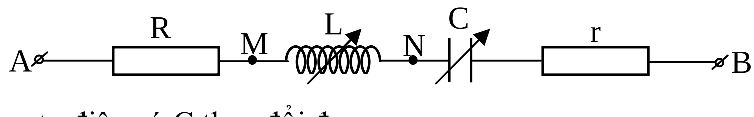
+ Hàm số y = f(x) có cực trị khi f'(x) = 0

+ Giải phương trình f'(x) = 0

+ Lập bảng biến thiên tìm cực trị.

+ Vẽ đồ thị nếu đề bài yêu cầu khảo sát sự biến thiên.

Ví dụ: Cho mạch điện xoay chiều hình vẽ.



Hiệu thế 2 đầu đoạn mạch AB là $u = 85\sqrt{2}\sin 100\pi t (V)$ R= 70Ω; r= 80Ω cuộn dây có L thay đổi được, tụ điện có C thay đổi được.

1.Điều chỉnh $L = \frac{3}{2\pi}$ H rồi thay đổi điện dung C. Tìm điện dung C để U_{MB} cực tiểu. Khảo sát U_{MB} khi C thay đổi.

2.Điều chỉnh $C = \frac{1}{7\pi}.10^{-3}$ F rồi thay đổi L. Tìm độ cảm L để U_{AN} cực đại.

Bài giải:

1.Tìm C để U_{MB} cực tiểu.

$Z_L = 150\ \Omega$, R= 70Ω, r = 80Ω

$$U_{MB} = I.Z_{MB} = \frac{U\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = U\sqrt{\frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

Đặt $x = (Z_L - Z_C)^2$ $(x \geq 0)$

$$y= \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{80^2 + x}{150^2 + x}$$

$U_{MB}= U\sqrt{y}$

$U_{MB_{min}}$ khi y_{min}

Khảo sát hàm $y = \dfrac{80^2 + x}{150^2 + x} = 1 - \dfrac{150^2 - 80^2}{150^2 + x}$

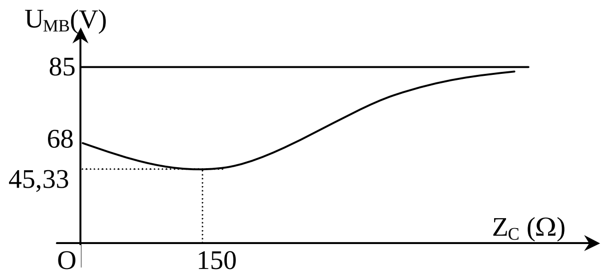
y_{min}= 0.2845 khi x = 0 $\Leftrightarrow (Z_L - Z_C)^2 = 0 \Leftrightarrow Z_C = Z_L = 150\Omega \Leftrightarrow C= \dfrac{1}{15\pi}.10^{-3}F$

$U_{MBmin}= U\sqrt{y_{min}} = 85\sqrt{0,2845} = 45,33$ (V)

Bảng biến thiên:

Z_C	0	150	∞
U_{MB}	68 ↘	45,33	↗ U = 85

Đồ thị:



2.Tìm L để U_{AN} max:

$$U_{AN}= I.Z_{AN}= \frac{U\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = U\sqrt{\frac{R^2 + Z_L^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

Đặt x= Z_L (x>0)

$$y= \frac{R^2 + Z_L^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{70^2 + x^2}{150^2 + (x - 150)^2}$$

$U_{AN}=U\sqrt{y}$

Để $U_{AN_{max}}$ thì y_{max}

Khảo sát: $y= \dfrac{70^2 + x^2}{150^2 + (x-150)^2}$

Lấy đạo hàm rồi thu gọn: $y' = \dfrac{-300x^2 + 80200x + 70^2.300}{\left[150^2 + (x-150)^2\right]^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow -300x^2 + 80200x + 1470000 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -17,22 \\ x = 284,55 \end{cases}$

$\Rightarrow Z_L = 284,55\Omega = L.\omega \Rightarrow L = \dfrac{284,55}{100\pi} \simeq 0,91H$

☞ ***Dạng 4: Bài toán áp dụng phép tính tích phân***

Để xác định vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chuyển động khi biết sự phụ thuộc của vị trí của vật theo thời gian đã dẫn chúng ta đến khái niệm về đạo hàm

$v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ $\qquad a(t) = \dfrac{dv}{dt}$

Bài toán ngược: cho biết vận tốc tức thời v(t) là 1 hàm đã biết. Xác định vị trí và quãng đường đi sau thời gian t đã dẫn chúng ta đến khái niệm về tích phân.

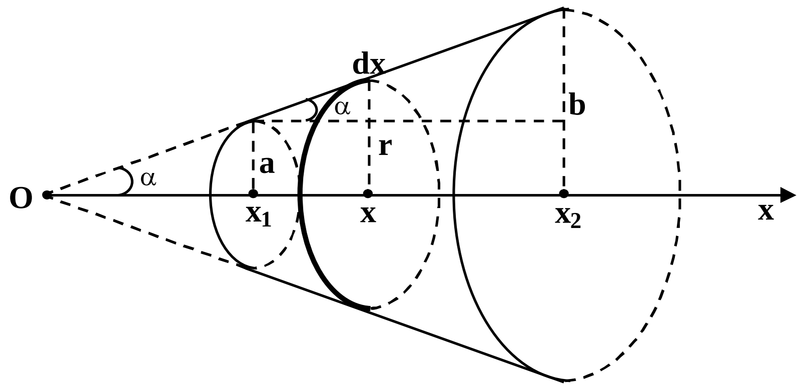
Ở phổ thông, toán học ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng hoặc tính thể tích hình tròn xoay. Môn vật lý ứng dụng tích phân để tìm đại lượng vật lý biểu diễn dưới dạng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong f(x) và các trục tọa độ như tính quãng đường đi, công của một lực thực hiện, xác định điện trường, điện trở, từ thông.

Ta dùng định nghĩa tích phân xác định:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Định nghĩa tích phân như là giới hạn của 1 tổng. Việc đi tìm hàm dưới dấu tích phân là vấn đề khó xác định cận trên, cận dưới nên chọn như thế nào cho phép tính đơn giản hơn.

Ví dụ 1: Một điện trở có dạng hình nón cụt, bán kính đáy lần lượt là a và b và chiều cao L. Giả sử mật độ dòng điện là đều qua bất kỳ tiết diện nào. Tính điện trở của vật đó.



Bài giải:

Chọn trục Ox như hình vẽ.

Ta chia khối điện trở thành những khúc điện trở nhỏ vi phân có chiều dài dx có tiết diện tròn bán kính r

Điện trở khúc vi phân có chiều dài dx: $dR = \rho.\dfrac{dx}{S}$ $\qquad \rho$: là điện trở suất

Theo hình: $\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{b-a}{L} \\ \tan\alpha = \dfrac{r}{x} \end{cases} \Rightarrow r = x.\tan\alpha; S=\pi.r^2$

Thay vào: $dR=\rho.\dfrac{dx}{\pi.r^2} = \rho.\dfrac{dx}{\pi.x^2.\tan^2\alpha}$

Điện trở R của khối là điện trở tương đương nhiều khúc vi phân dR mắc nối tiếp nhau.

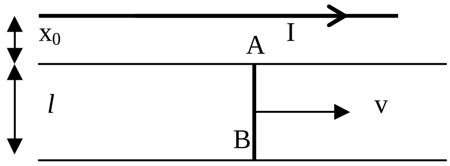
$$R = \sum_{i=1}^{n} dR_i = \int dR = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho.dx}{\pi.\tan^2\alpha.x^2} = \frac{\rho}{\pi.\tan^2\alpha}.\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2} = \frac{-\rho}{\pi.\tan^2\alpha}.\frac{1}{x}\Big|_{x_1}^{x_2}$$

Các cận tích phân: $x_1 = \dfrac{a}{\tan\alpha}$; $x_2 = \dfrac{b}{\tan\alpha}$

$$\Rightarrow R = -\frac{\rho}{\pi.\tan^2\alpha}\left[\frac{\tan\alpha}{b} - \frac{\tan\alpha}{a}\right] = \frac{\rho(b-a)}{\pi.\tan\alpha.ab} = \frac{\rho L}{\pi.a.b}$$

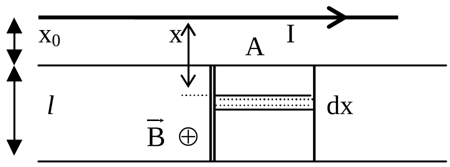
Khi a = b khối điện trở có dạng hình trụ

$R = \dfrac{\rho L}{\pi.a^2} = \rho.\dfrac{L}{S}$ S: tiết diện đáy hình trụ.



Ví dụ 2: Trong cùng một mặt phẳng với một dòng điện thẳng dài vô hạn có cường độ I=20A người ta đặt hai thanh kim loại trượt song song với dòng điện cách dòng điện một khoảng x_0 = 1cm và cách nhau l = 0,5 m (như hình vẽ). Trên hai thanh trượt người ta lồng vào một đoạn dây dẫn AB dài *l*. tìm hiệu điện thế xuất hiện giữa 2 đầu dây AB nếu cho dây AB trượt tịnh tiến trên các thanh với vận tốc v=3m/s

Bài giải



Dây AB chuyển động trong từ trường của dòng I nên trong khung suất hiện suất điện động cảm ứng.

Dây không kín nên $U_{AB} = |e_C| = \left|-\dfrac{d\Phi}{dt}\right|$

Xét đoạn dây vi phân dx chuyển động song song dòng điện cách dòng điện một đoạn x
Từ thông quét qua dây vi phân dx khi chuyển động

$d\Phi = B.dS = \dfrac{\mu_0 I.v.t.dx}{2\pi x}$ với dS = v.t.dx

Từ thông quét qua cả đoạn AB là tổng các từ thông quét qua các đoạn vi phân dx.

$$\Phi = \sum d\Phi = \int_{x_0}^{x_0+l} d\Phi = \int_{x_0}^{x_0+l}\frac{\mu_0.I.v.t.dx}{2\pi.x} = \frac{\mu_0.I.v.t}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+l}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0.I.v.t}{2\pi}.\ln\left|\frac{x_0+l}{x_0}\right|$$

$U_{AB} = |e_C| = \left|-\dfrac{d\Phi}{dt}\right| = \dfrac{\mu_0.I.v}{2\pi}.\ln\left|\dfrac{x_0+l}{x_0}\right|$ với $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ (Độ từ thẩm)

Thay số vào biểu thức ta được: $U_{AB} = 4,72.10^{-5}$ V